ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THÀNH CÔNG

KHAI THÁC MỐI QUAN HỆ HÌNH HỌC - ĐẠI SỐ VÀO GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH GIỎI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THÀNH CÔNG

KHAI THÁC MỐI QUAN HỆ HÌNH HỌC - ĐẠI SỐ VÀO GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH GIỎI

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. Trịnh Thanh Hải

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Lời cảm ơn

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi luôn nhận được sự ủng hộ, hướng dẫn và giúp đỡ của PGS. TS. Trịnh Thanh Hải. Thầy luôn quan tâm, theo dõi sát sao, dành nhiều thời gian chỉ bảo tận tình, hướng dẫn và giải đáp các thắc mắc của tôi. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đến Thầy.

Tôi xin gửi lời cảm ơn đến các Thầy, Cô khoa Toán – Tin và phòng Đào Tạo của trường Đại Học Khoa học - Đại học Thái Nguyên cũng như các Thầy Cô tham gia giảng dạy khóa học cao học 2017 – 2019 đã tận tình chỉ bảo truyền đạt kiến thức trong suốt thời gian theo học, thực hiện và hoàn thành luận văn.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cám ơn tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã luôn động viên, giúp đỡ, là chỗ dựa vững chắc về vật chất và tinh thần cho tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thiện luận văn thạc sỹ.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2019
Tác giả

Nguyễn Thành Công

Lời nói đầu

1. Lý do chọn đề tài

Hình học và Đại số là hai nội dung quan trọng xuyên suốt chương trình toán THCS - THPT góp phần cấu thành nên bộ môn Toán học. Do đó, việc nghiên cứu khai thác mối quan hệ giữa Hình học và Đại số là một vấn đề rất đáng để quan tâm. Đồng thời thông qua đó, cho ta cái nhìn tổng thể hơn, góp phần giúp chúng ta hiểu rõ hơn về Toán học cũng như giúp ích cho việc dạy và học bộ môn Toán học.

Hiện nay, nền giáo dục tiên tiến của các nước phát triển trên thế giới rất quan tâm chú trọng việc dạy và học liên môn: giữa các môn với nhau và giữa các phân môn trong cùng một môn học. Nền giáo dục của Việt Nam không nằm ngoài xu hướng của thời đại, đã và đang dần chuyển mình tiếp cận học hỏi, sáng tạo và ứng dụng xu hướng dạy học này.

Chương trình Toán trong trường THCS - THPT hiện nay, bộ môn Toán chứa hai mảng rõ rệt: phần 1 là Đại số, phần 2 là Hình học. Điều này có mặt tích cực là giúp học sinh nhận biết ngay được cấu trúc chương trình và tiếp thu kiến thức một cách có hệ thống. Nhưng ngược lại, nó làm cho học sinh hiểu rằng đây là hai phân môn độc lập với nhau, không có mối quan hệ tương trợ qua lại, cũng như việc gắn kết hai phân môn này trong sách giáo khoa THCS- THPT là chưa được đề cập rõ ràng đầy đủ.

Thực tế quá trình dạy và học đã chứng minh rằng, học sinh hiểu biết về mối quan hệ Hình học và Đại số khá mơ hồ và gần như hiểu đây là 2 phân môn riêng biệt, góp phần tạo nên môn Toán học. Các em học phân môn nào thì học và làm bài tập phân môn đó, cũng như giáo viên dạy học theo tiết môn Hình học thì chuyên làm bài về Hình học, Đại số thì chuyên làm bài về Đại số, ít hoặc không hoặc chưa chú trọng đề cập đến sự liên kết giữa Hình học và Đại số trong giảng dạy cũng như giải bài tập.

Thông qua tìm hiểu thực tế, tôi thấy rằng việc khai thác mối quan hệ giữa hai phân môn Hình học và Đại số sẽ góp phần quan trọng giúp các em hiểu biết hơn về bộ môn Toán học, cũng như trợ giúp các em ôn thi và thi học sinh hỏi cấp THCS - THPT có cái nhìn mới, hướng đi mới, cách tiếp cận lời giải mới, phong phú hơn trong quá trình ôn luyện và thi môn Toán.

Vì những lý do trên, tôi quyết định chọn đề tài: "Khai thác mối quan hệ Hình học - Đại số vào giải một số bài toán dành cho học sinh giỏi". Thông qua nghiên cứu nhỏ này, tôi mong rằng mình sẽ góp phần làm rõ hơn mối quan hệ giữa hai phân môn Hình học và Đại số, mối quan hệ tương trợ lẫn nhau trong quá trình giảng dạy và học Toán của bản thân ở THCS.

2. Mục đích, nhiệm vụ của luận văn

Mục đích của luận văn này là khai thác mối quan hệ giữa Hình học và Đại số góp phần tiếp cận hướng giải toán mới của bài toán bằng con đường vận dụng tính chất Đại số để giải bài toán Hình học và ngược lại giải các bài toán Hình học với công cụ Đại số thông qua việc giải một số bài toán dành cho học sinh giỏi, là đề thi chọn học sinh giỏi các tỉnh, toàn quốc và khu vực.

Luận văn tập trung vào hoàn thành các nhiệm vụ chính sau:

- Ý tưởng khai thác các tính chất, công cụ của Đại số để giải bài toán Hình học và ngược lại
- Sưu tầm một bài toán, đề thi về Đại số, Hình học dành cho học sinh giỏi.
- Đưa ra lời giải bằng cách vận dụng tính chất, công cụ của Đại số để giải một số bài toán Hình học và ngược lại khai thác các tính chất, phương pháp Hình học để giải các bài toán Đại số dành cho học sinh giỏi.

3. Nội dung của đề tài luận văn

Nội dung luận văn ngoài phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo sẽ gồm 2 chương:

Chương 1: Trình bày phương pháp khai thác kiến thức Đại số để giải một số bài toán Hình học

Chương 2: Trình bày phương pháp khai thác kiến thức Hình học để giải một số bài toán Đại số

Chương 1

Khai thác kiến thức Đại số để giải một số bài toán Hình học

1.1. Ý tưởng chung

Nội dung chương 1 minh họa ý tưởng vận dụng các tính chất, định lý, công cụ trong Đại số trong quá trình tìm ra lời giải cho một số bài toán Hình học bằng cách đưa ra một số ví dụ sử dụng kiến thức Đại số để đưa ra lời giải cho một số bài toán chọn lọc dành cho học sinh giỏi, là đề thi chọn học sinh giỏi các địa phương, toàn quốc cũng như đề thi chọn học sinh giỏi khu vực Châu Á - Thái Bình Dương và một số nước khu vực Đông Âu.

Một trong những khâu quan trọng ẩn trong những ví dụ là việc biến đổi bài toán ban đầu để chúng bộc lộ những điểm có thể vận dụng các tính chất của Đại số để giải quyết vấn đề, có thể tạm gọi đây là quá trình "Đại số hóa bài toán hình học" , sau đó là quá trình sử dụng công cụ Đại số để phát biểu bài toán Hình học ban đầu.

1.2. Một số ví dụ minh họa

1.2.1. Bài toán cực trị Hình học

Xuất phát từ 2 bất đẳng thức (BĐT) Đại số rất quen thuộc sau đây.
BĐT 1. Với các số dương a, b, c có

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Lời giải

$$\begin{aligned}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9 &= 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1-9\\ &= \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-2\right)\\ &= \frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ac}\geq 0.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a-b=b-c=c-a=0 \Leftrightarrow a=b=c$.

BĐT 2. Với các số dương a, b, c có

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Lời giải

Áp dụng BĐT 1 ta có

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} &= \left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{c+a}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)-3\\ &= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3\\ &= \frac{1}{2}\left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3\\ &\geq \frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $b+c=c+a=a+b \Leftrightarrow a=b=c$.

Có thể vận dụng hai bất đẳng thức trên vào giải và sáng tạo các bài toán chứa bất đẳng thức Hình học hoặc tìm cực trị Hình học.

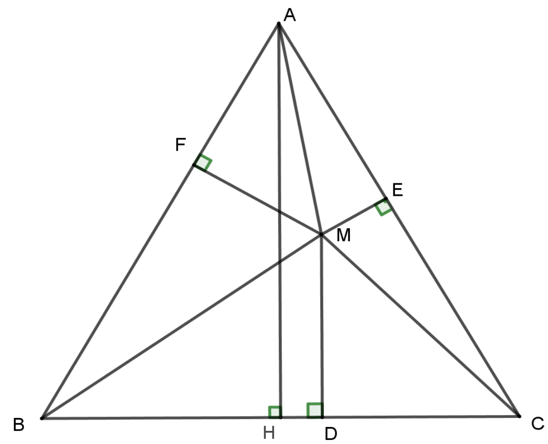
Sau đây là một số ví dụ minh họa được trích dẫn từ Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ và các tài liệu tham khảo

Bài toán 1.2.1.1. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Gọi đường vuông góc từ điểm M nằm trong tam giác đến các cạnh BC, CA, AB lần lượt là MD, ME, MF. Xác định vị trí của M để:

a) $\dfrac{1}{MD}+\dfrac{1}{ME}+\dfrac{1}{MF}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó.

b) $\dfrac{1}{MD+ME}+\dfrac{1}{ME+MF}+\dfrac{1}{MF+MD}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó.

Lời giải



Hình 1

Gọi $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ là độ dài đường cao của tam giác đều ABC và đặt $MD = x$, $ME = y, MF = z$. Ta có

$$S_{ABC} = S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB}$$

$\Leftrightarrow ah = ax + ay + az \Leftrightarrow x + y + z = h$ không đổi.

a) Áp dụng BĐT 1 ta có

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{h} = \frac{6\sqrt{3}}{a}.$$

b) Áp dụng BĐT 2 ta có

$$(x+y+y+z+z+x)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right) \geq 9$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x} \geq \frac{9}{2h} = \frac{3\sqrt{3}}{a}.$$

Trong cả hai trường hợp đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$, lúc đó M là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

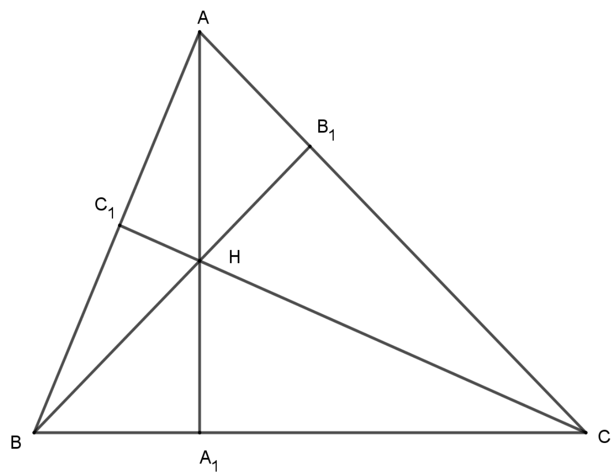
Bài toán 1.2.1.2. Gọi H là trực tâm tam giác ABC có ba góc nhọn với ba đường cao $AA_1; BB_1; CC_1$. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{AA_1}{HA_1} + \dfrac{BB_1}{HB_1} + \dfrac{CC_1}{HC_1} \geq 9$

b) $\dfrac{HA_1}{HA}+\dfrac{HB_1}{HB}+\dfrac{HC_1}{HC}\geq\dfrac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải



Hình 2

Gọi diện tích tam giác ABC, HBC, HAC, HAB lần lượt là S, S_1, S_2, S_3 thì

$$S=S_1+S_2+S_3.$$

a) Dễ thấy

$$\frac{HA_1}{AA_1}=\frac{S_1}{S};\frac{HB_1}{BB_1}=\frac{S_2}{S};\frac{HC_1}{CC_1}=\frac{S_3}{S}.$$

Do đó

$$\frac{HA_1}{AA_1}+\frac{HB_1}{BB_1}+\frac{HC_1}{CC_1}=1.$$

Áp dụng BĐT 1 được

$$\frac{AA_1}{HA_1}+\frac{BB_1}{HB_1}+\frac{CC_1}{HC_1}\geq 9.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{HA_1}{AA_1}=\frac{HB_1}{BB_1}=\frac{HC_1}{CC_1}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow S_1=S_2=S_3=\frac{S}{3},$$

lúc đó H vừa là trực tâm, vừa là trọng tâm của tam giác ABC nên ABC là tam giác đều.